ACTES DE LA VI TROBADA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(BARCELONA, SCHCT, 2002), 475-482

EL *PROCESO CÍCLICO DIALÉCTICO* EN EL DESARROLLO DE LA TEORÍA DE SUMACIÓN DE SERIES INFINITAS

Carlos Sánchez Fernández
Facultad de Matemática y Computación. Universidad de la Habana. Cuba

Palabras clave: *análisis matemático, series sumables, Rey Pastor*

The *dialectic cyclical process* in the development of the theory of summation of infinite series.

Summary: *The main objective of this work is to explain the dialectic cyclical process present in the development of the theory of summable series. We differentiate three stages in the evolution of the systematization mode and use of divergent series: the first (ingenuousness) c.1680-1780, the second (radicalism) c.1780-1880 and the third (maturity) c.1880-1940. We emphasize the rôle of Julio Rey Pastor's works in the stage of maturity.*

Key words: *mathematical analysis, summable series, Rey Pastor.*

Dialéctica del desarrollo de la teoría de series divergentes

En la Historia de la Matemática pueden encontrarse muchos ejemplos de uso temprano de las series numéricas. Son bien conocidos los trabajos de la escuela francesa medieval y la demostración de la divergencia de la serie armónica por Pietro Mengoli. Pero un uso sistemático de las series infinitas como herramienta efectiva en los problemas geométricos, no aparece hasta que el nuevo cálculo de diferencias y de fluxiones lo requiere para dar respuesta a las exigencias de la práctica en la época de la Revolución Científica.

Las series de funciones aparecen en el cálculo infinitesimal para facilitar el manejo analítico de ciertas funciones *rebeldes*. El éxito que se obtuvo con el uso de estas nuevas técnicas en la resolución de los problemas importantes asociados con el desarrollo de la mecánica y la física newtoniana, promovió una vehemente competencia en la que se generaron paradojas y contradicciones.

En el siglo XVIII se llegó a cierto consenso con relación al uso de las sumas infinitas y, en particular, de la práctica con las *series de potencias* se infería que:

1. Las series son parte esencial e imprescindible del calculo infinitesimal,
2. Las series constituyen una extensión del álgebra de polinomios,
3. Toda función puede representarse en forma de serie.

Pero también se consideraron ideas más audaces que no gozaron de la aceptación de todos; por ejemplo, que:

1. Toda serie posee una *única* función generatriz,
2. Una serie, *aunque sea divergente*, puede ser útil para aproximaciones numéricas,
3. Una serie puede representar una función en operaciones analíticas, *incluso siendo divergente.*

Es bien conocido que Euler fue un paladín defensor de todas estas ideas, tanto las comúnmente aceptadas, como las más audaces; y que era consciente del riesgo de usar series divergentes, aunque consideraba preferible arriesgarse al error antes de dejar un problema sin solución.

El tratamiento que da Euler a las sumas infinitas representa el paradigma del siglo XVIII y fue reflejado como «ciencia normal» en los mejores textos de la época, hasta en la primera edición del famoso *Traité du Calcul differentiel et du Calcul intégral* de Lacroix, aparecida en 1797. Pero en la segunda edición de 1810, mostrando la precaución de otra nueva época, Lacroix va a llamar la atención sobre el hecho de que la serie no siempre tiene el valor de la función que representa, aunque mantiene la idea defendida por Euler de que la serie está asociada a la función y en cualquier operación analítica, serie y función, entran con las mismas consideraciones. Lacroix (1810, vol. 1: 4)

Este cambio, reflejado en uno de los textos más influyentes de la época, indica el comienzo de una radicalización crítica que se va a producir en la *edad de las revoluciones*, así llamada por el historiador inglés Hobsbawn (1962: 345):

> *No one could fail to observe that the world was transformed more radically than ever before in this era ... It is hardly surprising that patterns of though derived from the rapid social changes, the profound revolutions, the systematic replacements of customary or traditional institutions by radical rationalist innovations, should become acceptable ...*

Con relación a la sumación de series este radicalismo racionalista se observa sobre todo en la generación formada en las primeras décadas de la Ecole Polytechnique de París, donde la actitud crítica, revolucionaria, ante la situación social, se desborda hacia todos los reductos de la conciencia social y, en particular, hacia las Ciencias Matemáticas.

Pero más que preocupación por *legitimar* la designación de un valor para la suma infinita, en esta segunda etapa lo que realmente ocupa la atención de los analistas es *el problema de la representación*. El análisis de la posibilidad de representar analíticamente *funciones arbitrarias* por series de funciones elementales se hace cada vez más importante. Las técnicas eulerianas, desarrolladas en un contexto funcional más restringido, se tornan inseguras y poco fiables, sobre todo para el racionalista radical. La representación por series de Fourier sirve de muestra del tipo de problema surgido en la física matemática de principios del siglo XIX, que exigía una *rigorización del método*. Tal rigorización, para que fuese constructiva, debía *negar dialécticamente* la práctica matemática anterior, procurando eliminar una mínima parte de las soluciones dadas a los problemas priorizados del siglo XVIII. Era necesario un sacrificio en el nivel empírico, en beneficio de la elevación del nivel racional teórico.

Es completamente natural que en este momento se recrudeciera la discriminación de las series divergentes. Unos, porque comprenderían la necesidad de *legislar* acerca de los derechos de cada tipo de serie, para servir de representante de las funciones más rebeldes; tal es el caso de Abel y Cauchy, cuyos estudios promueven la cautela en el trato con series no convergentes, pero no prohiben categóricamente su servicio. Otros, porque su mentalidad estrecha no les permitía comprender el justo, y necesario, sentido dialéctico de la negación y dogmatizarían mecánicamente el rigor de los maestros, proscribiendo el uso de todo lo que no fuera comprobadamente convergente, independiente de cualquier otro valor, heurístico o práctico. La mayoría, porque el temor congénito de errar y ser estigmatizado los llevaría a autolimitarse en el uso de un instrumento cuya potencialidad era misteriosa: convencer de que una serie, siendo divergente, da una buena aproximación y sirve de representante en operaciones analíticas, no es asunto fácil, aún hoy en la era de la informática.

Por supuesto, que aquellos que continuaban priorizando el lado práctico, heurístico, del uso de las series divergentes, entraron en polémica. Pero, a diferencia de lo ocurrido en el siglo XVIII, ahora la mayoría se agrupaba al lado de los radicales. Es interesante notar cómo las comunidades científicas europeas asumieron posiciones diferentes ante esta polémica.

La generación de la Analytical Society de Cambridge, aunque fue vanguardia en la aceptación del rigor continental, estaba formada en el culto a los algoritmos, y admitía sin mucha cautela el uso de las series divergentes:

> «*... the attempt to exclude the use of divergent series in symbolical operations would necessarily impose a limit upon the universality of algebraic formulae and operations which is altogether contrary to the spirit of the science..»* Peacoks (1833)

Así mismo se pronuncian, o actúan en base a tales convicciones, otros como A. de Morgan, J. R. Young, R. Moon, S. Earnshaw, T. Jarret. Algunos logran importantes resultados, como es el caso de Stokes (1857), quien atacó con maestría problemas cuya resolución numérica con las series divergentes era paradójicamente mucho más precisa y rápida que utilizando las series convergentes (véase Ramis, 1993).

La sociedad alemana, aún dividida, siendo económica y políticamente más débil, presenta ante la señalada polémica una gama de concepciones entramadas poco sistemáticas. M. Ohm, por ejemplo, mantenía puntos de vista más conservadores, que estaban en conflicto con Schlomilch, Grunert y Dirksen. A su vez, Grunert y Schlomilch desechaban el rigor dogmático que defendía Dirksen. Jacobi, no precisamente por *el honor del espíritu humano*, sino por sus intereses en investigaciones aplicadas, usa series asintóticas. Dirichlet, por su parte, va a procurar el rigor al estilo de la escuela francesa. (Más detalles en Burkhardt, 1911)

Aún en la Francia más revolucionaria y romántica, encontramos repetidos llamados al papel heurístico de las series divergentes. El mismo Cauchy, que tanto abogaría por el rigor, utiliza series divergentes en sus investigaciones aplicadas[1] sobre problemas de ondas, óptica y astronomía; y ya, en su madurez profesional, hasta escribe un artículo «*...para poner en evidencia las ventajas que puede ofrecer el empleo de la serie de Stirling y muchas otras series de la misma naturaleza, a pesar de su divergencia».* Cauchy (1843).

1. Por ejemplo, en sus investigaciones sobre difracción de la luz, véase *Comptes Rendues 15*,1842, 554-556, 573-578 - Oeuvres *(1) 7*, 149-157.

Poisson, Navier, Lamé, Liouville, entre otros, aprobaban el uso cauteloso de las series divergentes en los problemas de integración de ecuaciones diferenciales, y no era poco frecuente que las utilizaran sin la precaución requerida.

Debemos señalar que esta polémica se mantuvo hasta finales del siglo, hasta que la acumulación de casos anómalos y rebeldes impuso la necesidad de volver a negar sobre lo negado y regresar a las condiciones iniciales del modo de sistematización sobre un nivel cualitativo superior, cerrando un ciclo dialéctico. Pero este salto cualitativo, que conlleva a la síntesis dialéctica de los principios heurísticos eulerianos y el rigor crítico-teórico, no era posible sin un desarrollo interno de la teoría de las funciones, en especial de una comprensión más amplia del problema de la representación analítica. Por otra parte, se tenían que producir mudanzas en las comunidades científicas, que son, a fin de cuentas, las que responden por la elaboración, sistematización y aplicación del saber matemático.

Todos estos cambios se van produciendo sincrónicamente, hasta que se produce el salto cualitativo. Cuando las condiciones objetivas y subjetivas *maduran* suficientemente, entonces se propicia la *modificación racional de la práctica matemática,* y las contradicciones, que modulan el desarrollo, conllevan a situaciones extremas en las que no suele haber otra salida que el cambio revolucionario del modo de sistematización.

Etapa de madurez: transformación de la teoría de series divergentes en *Ciencia normal.* Papel de la obra de Rey Pastor.

Hemos resumido los rasgos esenciales que observamos en la génesis de la teoría de series divergentes, rasgos que ilustran el proceso cíclico dialéctico presente en la evolución del modo de sistematización del conocimiento científico:

1.º Contradicciones dialécticas, condicionantes del desarrollo del modo de sistematización (a partir de la publicación de los trabajos de Leibniz y de los Bernoulli y hasta la divulgación de las ideas de Lagrange, aproximadamente de 1680 hasta 1780)

2.º Cambios del modo de sistematización en condiciones cualitativamente nuevas (negación dialéctica, entre 1780 y 1880 aprox., sobre todo en la obra de Abel y Cauchy).

3.º Regreso a las condiciones iniciales del modo de sistematización de la teoría sobre un nivel cualitativo nuevo (negación de la negación o síntesis dialéctica, a partir de las ideas de Frobenius, Hölder y Cesàro-ver, p. e., Ferraro, 1999).

Pero esta evolución del modo de sistematización en el caso de la teoría de series divergentes no se presenta de forma aislada e independiente, sino que es reflejo en lo particular de un movimiento general que tiende al cambio en la concepción clásica sobre representación analítica y determina toda una renovación en el estilo matemático. Paralelamente al cambio en el modo de sistematización, se producen otros cambios: en el método deductivo y en la elevación del grado de formalización, en la comprensión del rigor en la demostración matemática, en el enfoque sobre la complejidad y la profundidad de las relaciones del aparato matemático de las sumas infinitas con la realidad; transformaciones en los grupos sociales que responden por la elaboración y aplicación del saber matemático. Todos estos cambios se van produciendo sincrónicamente, conformando un salto cualitativo en el desarrollo de la matemática, muy semejante a lo que Ph. Kitcher ha llamado *modificación racional de la práctica matemática* (Kitcher, 1984: 163). Tales alteraciones revolucionarias precisan, para su cabal realización, del papel creador del sujeto.

> *«La idea-objetivo se transforma en objetivo-realizado sólo a través de la actividad del científico (...) todo objetivo es alcanzable, pero quien determina si el objetivo se ha alcanzado o no, es el científico»* (Barabashev, 1983: 164-165)

Nuestro análisis histórico de las obras de la época nos indica que la figura sobresaliente, capaz de este paso revolucionario y con suficiente cultura matemática para expresarlo seductoramente, era Emile Borel (ver Sánchez Fernández, 1994).

Borel, por su formación científica, por su personalidad, por las circunstancias que lo condicionaron y las fuentes que sustentaron su hacer en la matemática, fue capaz de prender la chispa que echó a andar el potente motor que generó la energía suficiente para transformar concepciones tan arraigadas. Emile Borel, en su obra temprana de 1895 a 1901, logró llamar la atención de los más talentosos analistas de la época sobre un tema que todavía seguía siendo tan polémico como en la época de Cauchy y Abel. Desde que aparece el texto de las conferencias sobre series divergentes, que Borel dictara en la Escuela Normal Superior, y que fuera publicado en la *Colección de Monografías sobre la Teoría de Funciones* (Borel, 1901), se abrieron posibilidades preciosas para la difusión, extensión y sistematización de las ideas sobre la teoría de sumas infinitas.

Pero Borel no podía conseguir por si sólo la transformación de la teoría en «ciencia normal». Así como tuvo precursores en Frobenius, Hölder, Cesàro y Stieltjes, Borel tuvo muchos émulos y sucesores, como Mittag-Leffler, Le Roy, Féjer, Hausdorff o Hardy, que pronto recibieron el aplauso de su comunidad. Menos conocido, aunque muy significativo, fue el aporte de Julio Rey Pastor, que generó seguidores tanto en la península española, como en la otra orilla, en Hispanoamérica.

Rey Pastor conoció la obra de Borel, seguramente, en la Biblioteca de García de Galdeano, y desde muy temprano la va a citar en sus conferencias y publicaciones, así como cita las obras clásicas de Euler y los primeros artículos de Césaro sobre sumación en la media aritmética, que también pudo encontrar allí.

Rey Pastor, en sus estancias en Alemania, había trabajado en contacto con las escuelas de Gotinga y Berlín, que seguramente estaban elaborando las ideas que más tarde le servirían a él mismo para establecer su teoría. Así como subrayó la relación con los problemas de prolongación analítica, más afines con el enfoque francés, también enfatizó la importancia del método de los momentos de la escuela alemana, en la sistematización de una teoría general de los algoritmos lineales de sumación y convergencia.

Rey Pastor tiene una obra extensa dedicada a sumación de series divergentes. Son más de 20 trabajos escritos, cursos dictados en Argentina y España, artículos científicos publicados en Argentina, Bélgica, España, Francia, Italia y Japón, además de una monografía sobre la *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y sumación* (Rey Pastor, 1931), que seguramente es el primer texto sistemático que aparece publicado sobre estos métodos, y que esta basado en los cursos que, desde 1926, dictó en las universidades de Buenos Aires y Madrid. Obra, esta última, que servirá de fuente principal para el trabajo de sus discípulos tanto en España como en Latinoamérica.

Establece Rey Pastor una teoría coherente de límites generalizados para integrales, funciones y sucesiones. Muestra como muchos resultados importantes se sitúan, de forma natural, como casos particulares. Así, los métodos de Euler y de Borel se ajustan en su esquema, fundamentalmente por su íntima conexión con el problema de la prolongación analítica.

La impresión tipográfica, bastante deficiente, no ayuda a decidirse a su lectura y estudio. Como el mismo Rey Pastor señala, esta accidentada edición se debe a «las dificultades de todo orden por que atraviesa la Universidad (*de Buenos Aires*); para no dilatar indefinidamente su aparición, ha sido preciso mutilar la obra, desistiendo de imprimir algunos capítulos y el estudio bibliográfico que debía complementarla.» La falta de citaciones y de una relación de literatura torna realmente difícil un estudio acucioso de las diferentes influencias que motivaron a Rey Pastor a tomar su línea de investigación. No obstante, la monografía tiene un mérito principal, y es que representa el primer intento de sistematizar una teoría general de los algoritmos de convergencia y sumación. La obra de Hardy (1949), más completa y enciclopédica, aparece 18 años mas tarde, ya después de la muerte de Hardy, gracias a los esfuerzos de su amigo J. E. Littlewood por terminar la empresa que con entusiasmo había comenzado Hardy al retornar a Cambridge en 1931.

Es cierto que antes de la monografía de Rey Pastor habían aparecido otras obras, como las de Ford (1916) y Smail (1925), así como la 2ª edición del magnífico libro de Borel (1928). Ninguna de estas obras se plantea el objetivo de sistematizar la teoría de los algoritmos lineales de sumación y convergencia. También, como respuesta al interés demostrado por el tema en estas primeras décadas del siglo, habían sido publicadas las segundas ediciones ampliadas de Knopp (1924) y Bromwich (1926), pero que no son monografías sobre series divergentes, sino textos generales sobre teoría de series, donde se trata de dar una visión panorámica de la teoría y las aplicaciones, incluyendo los resultados básicos de la sumación.

O sea, que la única obra que adopta como proyecto unificador el hecho de centrar el problema de la sumación y la convergencia en sus características de algoritmos lineales, partiendo de los resultados de la escuela alemana, es la monografía de Rey Pastor.

En resumen, podemos afirmar que si la publicación de la monografía de Rey Pastor no hubiera sido tan accidentada y de tan mala calidad tipográfica, sería hoy justamente señalada como la precursora y mejor orientada monografía sobre el enfoque funcional de la teoría de series divergentes. Si no es así es porque, además de editarse en la Universidad de Buenos Aires como una publicación interna y con deficiencias notables, su objetivo era sólo que sirviera de base a los estudios de sus alumnos tanto en Argentina como en España. Este objetivo fue conseguido en la obra de Ricardo San Juan, J. C. Vignaux, Durañona y Vedia y varios más, en una y otra orilla.[2]

Los discípulos de Rey Pastor, desde las dos orillas, se esforzaron en obtener resonancia internacional, pero también con poco éxito. ¿Cuál fue la razón de este aparente fracaso? Una respuesta definitiva implicaría un estudio profundo y más detallado del contexto social internacional y de los paradigmas que prevalecían en su momento. A nuestro modesto

2. No quisiera dejar de mencionar la obra de un hijo de Cataluña, *Ferran Sunyer i Balaguer* (1912-1967), quien tempranamente, desde 1939, llegó a publicar varios trabajos interesantes sobre fórmulas de sumabilidad y series lagunares. Creemos que indirectamente, a través sobre todo del discípulo principal de Rey Pastor, Ricardo San Juan (1908-1969) las ideas de Rey penetraron en Sunyer (Malet, 1995). Pero aún no hemos podido realizar esta investigación que nos aclararía el papel de Ferran Sunyer dentro de la comunidad española, y especialmente catalana, en la divulgación y sistematización de las ideas sobre series sumables.

entender, la obra de Rey Pastor se enmarca perfectamente en las líneas principales de desarrollo matemático de la época. Su producción en esta dirección no llegó tardía, como alguno de sus biógrafos ha señalado. Para documentar esta afirmación, baste, quizás, un dato: en el estudio enciclopédico de K. Zeller, junto con W. Beekman, de todas las obras publicadas entre 1880 y 1965 sobre procesos de sumación y convergencia, los trabajos referidos correspondientes a los años 1916-1925 ocupan 6 páginas, mientras que los correspondientes a los años 1926-1935 ocupan casi 25 páginas. O sea, en el momento que aparecieron las principales obras de Rey Pastor, el interés sobre el tema se había multiplicado cuatro veces. Aunque sea válido considerar otros factores cualitativos que pudieron incidir en estas cifras, no cabe duda que al menos no se había perdido el interés por esta línea de investigación.

Rey Pastor no llegó tarde a la palestra internacional con sus trabajos sobre series divergentes. Quizás sea válido decirlo sobre sus trabajos en Geometría, pero de ninguna forma en esta dirección. La promoción de su obra no se consiguió por otras razones, no precisamente asociadas con la calidad y actualidad. Consideramos que aún quedan varios problemas por dilucidar para llegar a revalorizar justamente el esfuerzo de Julio Rey Pastor y sus discípulos en la sistematización de la teoría de series divergentes como Ciencia Normal (véase Español, L. & Sánchez, C., 2001).

Bibliografía

BARABACHEV, A. G. (1983), *Dialéctica del desarrollo del saber matemático,* Moscú, Univ. de Moscú (en ruso).
BOREL, E. (1901), *Leçons sur les séries divergentes,* 2ª ed. 1928, París, Gauthier-Villars.
BROMWICH, T. J. (1926), *An Introduction to the theory of infinite series,* 2ª ed., London.
BURKHARDT, H. (1911), «Uber den Gebranuch divergentes reihen in der Zeit von 1750-1860», *Math. Annalen, 70,* 169-206.
CAUCHY, A. (1843), «Sur l'emploi légitime des séries divergentes», *Comp. Rend., 17,* 370-376.
ESPAÑOL, L. & SÁNCHEZ, C. (2001), «Julio Rey Pastor y la Teoría de Sumación de Series Divergentes», *LLULL, 24.*
FERRARO, G. (1999), «The first modern definition of the sum of a divergent series: an aspect of the rise of 20th century Mathematics», *Archiv Hist. Exact Sc., 54,* 104-135.
FORD, W. B. (1918), *Studies on divergent series and summability,* New York, Univ. of Michigan.
HARDY, G. H. (1949), *Divergent Series,* Oxford, Clarendon Press.
HOBSBAWN, E. (1962), *The age of revolution 1789-1848*, New York, Toronto, 1962, Mentor Book.
KITCHER, P. (1984), *The Nature of Mathematical Knowledge,* New York, Oxford Univ. Press.
KNOPP, K. (1921), *Theory and application of infinite series,* Translated from the second german edition in 1951, London, Blackie & Son.
LACROIX, S.F. (1797), *Traité du Calcul Differentiel et du Calcul Intégral,* 2ª ed., vol. 1, 1810. París.
MALET, A. (1995), *Ferran Sunyer i Balaguer (1912-1967),* Barcelona, Societat Catalana de Matemàtiques/Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica.

PEACOKS, G. (1833), «Report on the present progress and present state of certain branches of analysis», *Brit. Assoc. Reports, 3,* 188-282.

RAMIS, J. P. (1993), *Series Divergentes et Théories Asymptotiques,* París, Societé Mathématique de France/Institut Henri Poincaré.

REY PASTOR, J. (1931), *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y sumación,* Buenos Aires, Imprenta de la Univ. de B. Aires.

SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, C. (1994), «Revalorización de la obra temprana de Emile Borel sobre sumación de series divergentes», *LLULL, 17,* 437-467.

SMAIL, L. L. (1925), *History and sinopsis of the theory of summable infinity process,* Eugene, Oregon Univ. Press.

STOKES, G. (1857) «On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series», *Trans. Cambridge Phil. Soc., 9,* 166-187.

TUCCIARONE, J. (1973) «The development of the theory of summable divergent series from 1880 to 1925», *Arch. Hist. Exact Sc., 10,* 1-40.

ZELLER, K. & BECKMANN, W. (1970), *Theorie der limiturungsverfahren,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer grenzgebiete, 15, Berlin, Springer Verlag.